**Марковские процессы**

1. **Основные понятия и определения**

Пусть имеется некоторая система *S*, состояние которой меняется с течением времени (под системой *S* может пониматься техническое устройство, производственный процесс, вычислительная машина, информационная сеть и т. д.). Если состояние системы S меняется во времени случайным, заранее непредсказуемым образом, говорят, что в системе протекает случайный процесс.

Случайный процесс, протекающий в системе *S*, называется **марковским** (или “процессом без последействия”), если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени t0 вероятность любого состояния системы в будущем (при *t>t0*) зависит только от ее состояния в настоящем (при *t= t0*) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (т. е. как развивался процесс в прошлом).

Марковский случайный процесс (цепь Маркова) можно определить также как последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из *k* несовместных событий *Ai* из полной группы. При этом условная вероятность *pij(s)* того, что в s –ом испытании наступит событие *Aj* при условии, что в *(s – 1)* – ом испытании наступило событие *Ai*, не зависит от результатов предшествующих испытаний. Независимые испытания являются частным случаем цепи Маркова. События называются **состояниями системы**, а испытания – **изменениями состояний системы**.

Марковские случайные процессы делятся на классы. Основными классифицирующими признаками являются:

   множество состояний, в которых может находиться система, и

   моменты времени, в которых происходит изменение состояния системы.

 Случайный процесс называется процессом с **дискретными состояниями**, если возможные состояния системы *S1, S2, S3, ...* можно перечислить (перенумеровать) одно за другим, а сам процесс состоит в том, что время от времени система S скачком (мгновенно) переходит из одного состояния в другое.

Кроме процессов с дискретными состояниями существуют случайные процессы с **непрерывными состояниями**: для этих процессов характерен постепенный, плавный переход из состояния в состояние. Например, процесс изменения напряжения в осветительной сети представляет собой случайный процесс с непрерывными состояниями.

Если переходы системы из состояния в состояние возможны только в определенные моменты времени *t1, t2, t3,…,* то марковский процесс относится к процессам с **дискретным** **временем**. В противном случае имеет место процесс с **непрерывным** **временем**.

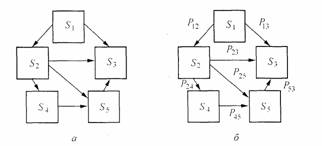
Анализ случайных процессов с дискретными состояниями обычно проводится с помощью **графа состояний и переходов (ГСП).**

Пусть имеется система *S* с *n* дискретными состояниями:

*S1, S2, S3, …Sn*

 Каждое состояние изображается прямоугольником, а возможные переходы (“перескоки”) из состояния в состояние — стрелками, соединяющими эти прямоугольники. Удобно также пользоваться **размеченным графом,** который графически изображает не только возможные состояния системы и возможные переходы из состояния в состояние, но также и значения вероятностей перехода.

Примеры ГСП показаны на Рис. *1*.

**

*Рисунок 1. Примеры графа состояний и переходов*

 Графу системы, содержащему *n* вершин, можно поставить в соответствие матрицу *n×n*, элементами которой являются вероятности переходов *pij* между вершинами графа, называемую **матрицей вероятностей переходов**. Элементы матрицы http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0001MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0001M.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif удовлетворяют условиям:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0002MP.gif, http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif , (1)

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0003MP.gif http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif (2)

Условие (1) - обычное свойство вероятностей, а условие (2) означает, что система *S* обязательно либо переходит из какого-то состояния *Si* в другое состояние, либо остается в состоянии *Si*. Элементы *pij* матрицы ***P*** обозначают вероятности переходов в системе за один шаг.

Обычно на графе вероятности перехода системы из одного состояния в то же самое не отмечаются. При рассмотрении конкретных систем удобно сначала построить граф состояний, затем определить вероятность переходов системы из одного состояния в то же самое (исходя из требования равенства единице суммы элементов строк матрицы), а потом составить матрицу переходов системы.

1. **Марковский процесс с дискретными состояниями**

**и дискретным временем**

Пусть система S может находиться в состояниях:

*S1, S2, S3, … Sn.*

и изменения состояния системы возможны только в моменты:

*t1, t2, t3, …tn.*

 Будем называть эти моменты **шагами**, или **этапами** процесса и рассматривать протекающий в системе S случайный процесс как функцию целочисленного аргумента *m* = *1, 2, ... k*, ..., обозначающего номер шага.

Указанный случайный процесс состоит в том, что в последовательные моменты времени *t1, t2, ..., tk,* ... система S оказывается в тех или иных состояниях. Процесс, происходящий в системе, можно представить как последовательность (цепочку) событий, например:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0004MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

называемую **марковской цепью**, где для каждого шага вероятность перехода из любого состояния Si в любое Sj не зависит от того, когда и как система пришла в состояние Si .

Марковскую цепь можно описать с помощью вероятностей состояний, в которых находится система на каком-то шаге. Пусть в любой момент времени (после любого шага) система может пребывать в одном из состояний:

*S1, S2, S3, ….Sn*

т. е., в результате шага *k* осуществится одно из полной группы несовместных событий:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0005MP.gif.http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

 Обозначив вероятности этих событий для *k* -го шага через

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0006MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

Легко видеть, что для каждого шага *k*

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0007MP.gif,http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

поскольку http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0008MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif, представляют собой вероятности появления полной группы событий.

Вероятности http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0009MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif называются **вероятностями состояния**.

Для любого шага (момента времени *t1,t2,...tk,*... или номера *1,2,...,k,...*) существуют некоторые вероятности перехода системы из любого состояния в любое другое (некоторые из них равны нулю, если непосредственный переход за один шаг невозможен), а также вероятность задержки системы в данном состоянии. Эти вероятностиназываются **переходными** **вероятностями** **марковской цепи**.

Если значения переходных вероятностей не зависят от номера шага, то марковская цепь называется **однородной, или стационарной**. В противном случае марковская цепь является **неоднородной, или нестационарной**.

Для графа на рис.1 значения переходных вероятностей http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0010MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif будут равны:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0011MP.gif,http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0012MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0013MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0014MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0015MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

 Если из состояния *Si* не исходит ни одной стрелки (переход из него ни в какое другое состояние невозможен), соответствующая вероятность задержки *Рii* равна единице.

Имея в распоряжении размеченный ГСП (или, что равносильно, матрицу переходных вероятностей) и зная начальное состояние системы, можно найти вероятности состояний *р1(k), р2(k), ... рn(k*) после любого (*k*-го) шага. Они находятся с помощью следующих рекуррентных соотношений:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0016MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif  (3)

или в матричной форме

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0017MP.gif http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif(4)

1. **Марковский процесс с дискретными состояниями**

**и непрерывным временем**

На практике встречаются ситуации, когда переходы системы из состояния в состояние происходят не в фиксированные, а в случайные моменты времени, которые заранее указать невозможно — переход может осуществиться в любой момент. Например, выход из строя (отказ) любого элемента аппаратуры может произойти в любой момент времени; окончание ремонта (восстановление) этого элемента также может произойти в заранее неизвестный момент и т. д.

Для описания таких процессов может быть применена схема марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем. Такого типа процессы известны как непрерывные цепи Маркова.

**Непрерывной цепью Маркова (марковским процессом)** называют процесс, для которого при *0≤ t1≤ t2≤ …tn+1* выполняется:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0018MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifЗдесь так же, как и в случае процесса с дискретным временем, рассматривается ряд дискретных состояний: *S1, S2, S3, ..., Sn*, однако переход системы ***S*** из состояния в состояние может происходить в произвольный момент времени.

Обозначим *pi(t)* — вероятность того, что в момент *t* система ***S*** будет находиться в состоянии *Si* (*i= 1, ..., n*). Очевидно, для любого момента *t* сумма вероятностей состояний равна единице:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0019MP.gif http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif (5)

так как события, состоящие в том, что в момент *t* система находится в состояниях *S1, S2,, ..., Sn* , несовместны.

Необходимо определить для любого *t* вероятности состояний:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0020MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif (6)

 Для того чтобы найти эти вероятности, необходимо знать характеристики процесса, аналогичные переходным вероятностям для Марковской цепи. В случае процесса с непрерывным временем вместо переходных вероятностей *Pij* рассматриваются плотностивероятностей (или интенсивности) перехода*λij* (поскольку вероятность перехода системы из состояния в состояние точно в момент *t* будет равна нулю, так же, как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины).

Пусть система ***S*** в момент *t* находится в состоянии *Sr* Рассмотрим элементарный промежуток времени *Δt*, примыкающий к моменту *t*. Назовем **плотностью вероятности перехода** *λij* из состояния *i* в состояние *j* предел (**или инфинитезимальными коэффициентами**) отношение вероятности перехода системы за время *Δt* из состояния *Si* в состояние *Sj* к длине промежутка *Δt*:

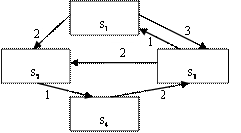
http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0021MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif  (7)

где *Pij(Δt)* — вероятность того, что система, находившаяся в момент *t* в состоянии Si, за время *Δt* перейдет из него в состояние *Sj* (плотность вероятностей перехода определяется только для *j≠i*). Из (7) следует, что при малом *Δt* вероятность перехода (с точностью до бесконечно малых высших порядков) равна:

P*ij*(Δt)=λ*ij* Δt

Если все плотности вероятностей перехода *λij* не зависят от *t* (от того, в какой момент начинается элементарный участок *Δt http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0022MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif*), марковский процесс называется **однородным**, а если эти плотности зависят от времени, то он является **неоднородным**.

Анализ случайных процессов с непрерывным временем так же как марковских процессов с дискретным временем удобно производить с помощью **графа состояний и переходов** (*Рис. 2*), на основании которого можно определить вероятности состояний *рi(t)* (6) как функции времени.

**

*Рисунок 2. Пример размеченного графа непрерывной цепи Маркова*

Распределение вероятностей состояний системы, которое можно характеризовать вектором http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0023MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif называется **стационарным**, если оно не зависит от времени, т.е. все компоненты вектора http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0024MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif являются константами.

Выходными характеристиками марковского процесса с дискретным множеством состояний и непрерывным временем являются:

   нестационарное распределение вероятностей http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0025MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif;

   стационарное распределение вероятностей http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0026MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif;

   среднее время пребывания в фиксированном множестве состояний;

   интенсивности перехода из одного множества состояний в другое.

 Весьма важным является вопрос о поведении функций *р1(t), р2(t), ..., рn(t)* при http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0027MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0027M.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif, а именно, будут ли они стремиться к каким-то пределам. Если эти пределы существуют, они называются **предельными** (**финальными**) вероятностями состояний.

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0028MP.gif http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif (8)

 Очевидно, предельные вероятности состояний в сумме должны давать единицу:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0029MP.gif http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif (9)

 Доказано, что если число состояний системы **S** конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в любое другое, то предельные вероятности состояний существуют и не зависят от начального состояния системы.

Таким образом, при http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0030MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0030M.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif в системе *S* устанавливается некоторый предельный стационарный режим: хотя система случайным образом и меняет свои состояния, но вероятность каждого из них не зависит от времени и каждое из состояний осуществляется с некоторой постоянной вероятностью, которая представляет собой **среднее относительное время** пребывания системы в данном состоянии. Это свойство позволяет обходиться при нахождении параметров системы на основе моделирования одной достаточно длинной реализацией.

Для вероятностей *p1(t), p2(t),…, pn(t)* можно составить систему линейных дифференциальных уравнений, называемых **уравнениями Колмогорова**, которыев случае нахождения предельных вероятностей превращаются в систему **линейных алгебраических уравнений** (**уравнений глобального баланса)** для каждого состояния. Совместно с нормировочным условием (9) эти уравнения дают возможность вычислить все предельные вероятности (8).

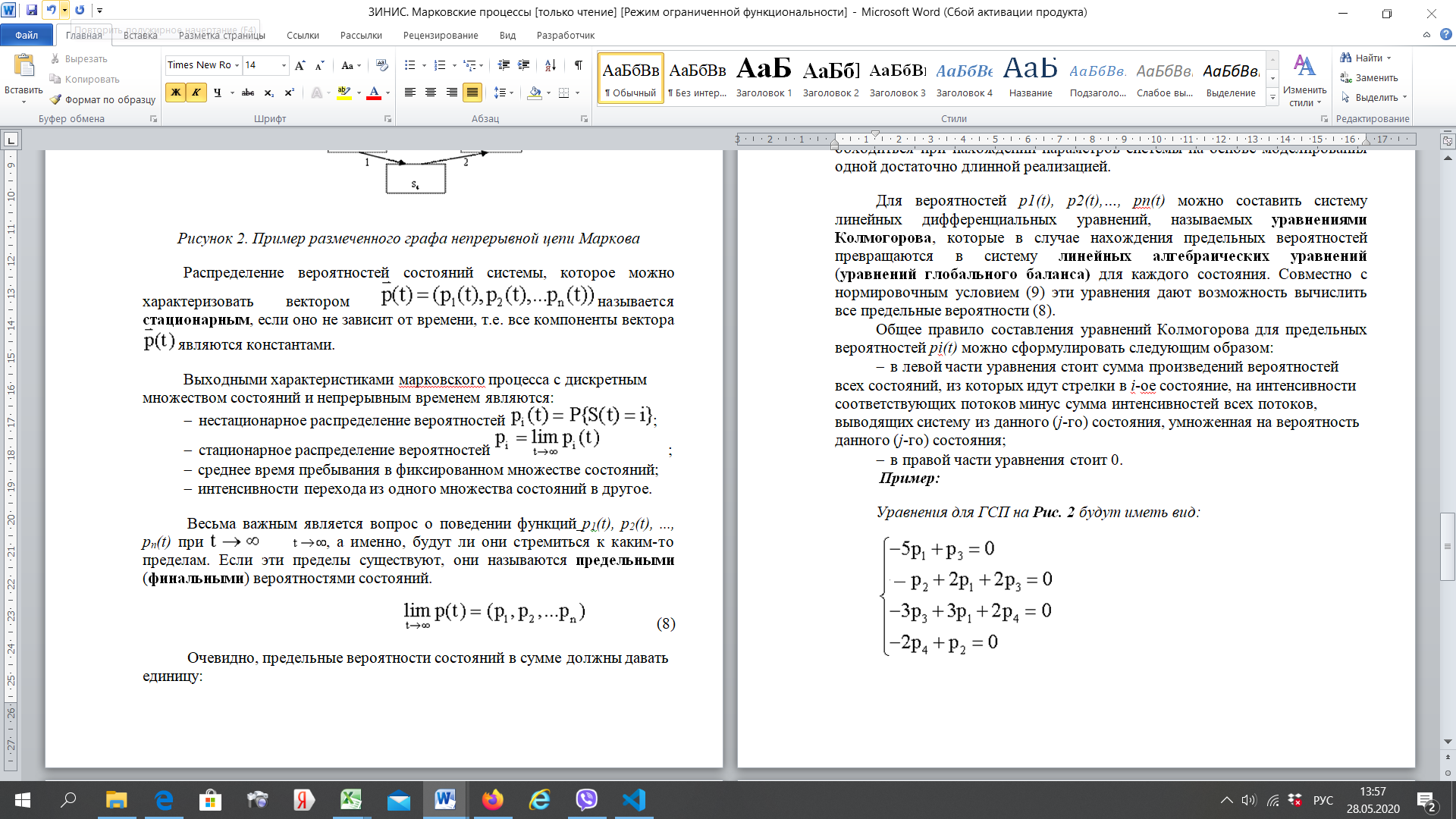
Общее правило составления уравнений Колмогорова для предельных вероятностей *pi(t)* можно сформулировать следующим образом:

   в левой части уравнения стоит сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в *i*‑ое состояние, на интенсивности соответствующих потоков минус сумма интенсивностей всех потоков, выводящих систему из данного (*j*-го) состояния, умноженная на вероятность данного (*j*-го) состояния;

   в правой части уравнения стоит 0.

***Пример:***

*Уравнения для ГСП на* ***Рис. 2*** *будут иметь вид:*

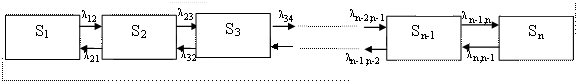


*Для получения системы независимых уравнений одно из уравнений следует заменить на условие нормировки(0‑9):*

*р1+ р2 + р3 + р4 = 1.*

**4.****Процессы гибели и размножения**

Примером составления уравнений для нахождения предельных вероятностей могут служить процессы **гибели и размножения,** ГСП для которых имеет вид на рис. 3.

**

*Рисунок 3. ГСП для процесса размножения и гибели*

 Запишем алгебраические уравнения для вероятностей состояний. В стационарных условиях для каждого состояния интенсивность потока, втекающего в данное состояние, должна равняться интенсивность потока, вытекающего из данного состояния.

Для первого состояния S1 имеем:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0032MP.gif http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif (10)

 Для второго состояния S2 суммы членов, соответствующих входящим и выходящим стрелкам, равны:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0033MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

 Но в силу (10) можно сократить справа и слева равные друг другу члены и тогда получим:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0034MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

и далее, совершенно аналогично,

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0035MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

и т. д.

Очевидно, для этого случая члены, соответствующие стоящим друг над другом стрелкам, равны между собой:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0036MP.gif http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif (11)

где *k* принимает все значения от *2* до *n*.

Итак, предельные вероятности состояний

*р**= (р1, р2. ..., рn)*

в любой схеме размножения и гибели удовлетворяют уравнениям:

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0037MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0038MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0039MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif  (12)

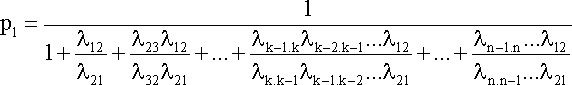
http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0040MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0041MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

и нормировочному условию (9):

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0042MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

Решение этой системы имеет вид

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif

http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0044MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif  (13)

***Пример.***

*Техническое устройство состоит из трех одинаковых узлов, каждый из которых может выходить из строя (отказывать). Отказавший узел немедленно начинает восстанавливаться. Требуется найти вероятности числа отказавших узлов.*

*Решение.*

*Состояния системы:*

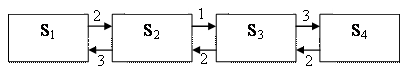
*S1 — все три узла исправны:*

*S2 — один узел отказал (восстанавливается), два исправны;*

*S 3 — два узла восстанавливаются, один исправен;*

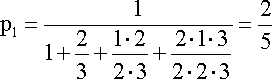
*S 4 — все три узла восстанавливаются.*

*ГСП имеет вид, показанный ниже.*



*Из графа видно, что процесс, протекающий в системе, представляет собой процесс размножения и гибели.*

*По формулам (13) получаем:*

*http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif*

*http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0046MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif*

*http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0047MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif*

*http://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/eq0048MP.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gifhttp://www.e-biblio.ru/book/bib/06_management/teor_mass_obslug/158.9.13.files/empty.gif*